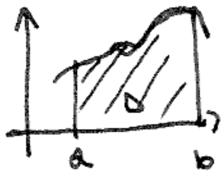
Analisi reale e complessa
(30/09/2013)

Sia $f : [a,b] \longrightarrow [0, +\infty)$ una funz. positiva limitata

cioè $c > f \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$, $\exists c \in \mathbb{R}$

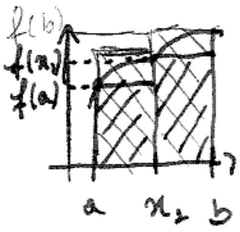


$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Sia $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ una partizione di $[a,b]$ e $f(x_j)$ il corr. valore della f

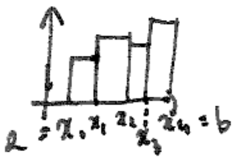
Consideriamo gli intervalli

$$[x_{j-1}, x_j),\ [x_j, x_{j+1})$$



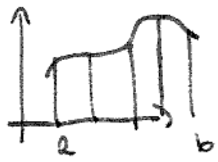
Consideriamo le funzioni semplici, cioè quelle t.c.

$$f(x) = c_j \quad \text{se} \quad x \in [x_{j-1}, x_j)$$



$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{k} c_j (x_j - x_{j-1})$$

Voglio ricondurmi al caso delle funz. semplici per tutte le funzioni.



Sia $f : [a,b] \to [0, +\infty)$ limitata come sopra

e $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ una partizione

~~$\Rightarrow$ Def $m_j = \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j)} f(x)$, $M_j = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j)} f(x)$~~ $\Rightarrow$ Def

$$m_j := \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j)} f(x)$$

$$M_j := \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j)} f(x)$$

Posso def $h, g : [a,b] \to [0, +\infty)$ come segue

$h(x) = m_j$ per $x \in [x_{j-1}, x_j)$ $\forall j = 1, \dots, n$

$g(x) = M_j$ per $x \in [x_{j-1}, x_j)$ $\forall j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow h \leq f \leq g$ e $\int_a^b h \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g$

cioè $\sum_{j=1}^{n} m_j (x_j - x_{j-1}) \leq \int_a^b f \leq \sum_{j=1}^{n} M_j (x_j - x_{j-1})$

A questo punto posso chiedermi se $\exists\, x_0, \dots, x_n$ partizione di $[a,b]$ ε-indipendente t.c.

$$(*)\ |g-h| < \varepsilon \Rightarrow \cancel{|g-h| = |g-f+f-h| = |(g-f)-(h-f)| < \varepsilon}$$

$$\cancel{\text{ma } |g-f+f-h| \le |g-f|+|f-h|} \quad e \quad h \le f \le g$$

ma se vale $(*)$ $\forall \varepsilon > 0$ ~~allora vale~~ $\cancel{f \le g-h \text{ e } f \ge -(g-h)}$

$$\cancel{\Rightarrow -(g-h) \le f \le (g-h) \Rightarrow |f| \le |g-h| < \varepsilon \Rightarrow}$$

$$0 \le f-h \le g-h \Rightarrow |f-h| \le |g-h| < \varepsilon$$

$$\vee\ h-g \le f-g \le 0 \Rightarrow 0 \le |g-f| \le |g-h| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |f-h| < \varepsilon \\ |f-g| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \text{dico che } f \text{ è integrabile}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g = \int_a^b h$$

Osserviamo che C^0 su K comp $\Rightarrow$ unif limit. $\Rightarrow$ integrabile
$\Downarrow$
posso scegliere le partizioni giuste

Ricordo: I intervallo $I \subset \mathbb{R}$ è t.c. $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ t.c.

$I = [a,b]$
$I = [a,b)$
$I = (a,b]$
$I = (a,b)$

e in ogni caso se

$b = \sup I \in \mathbb{R}$, $a = \inf I \in \mathbb{R}$ cioè $\neq \pm\infty$
$\Downarrow$
$a \le b$ e $(a,b) \subset I \subset [a,b]$

Sia $x \in I$ e $a < x < b$

$\Rightarrow x$ non è minorante di I
$\Leftrightarrow$
$\exists\, x_1 \in I : x > x_1$

$\Rightarrow x$ non è maggiorante
$\Leftrightarrow$
$\exists\, x_2 \in I : x_2 > x$

In $\mathbb{R}^n$ gli intervalli sono:

$n=1$ (a,b) intervalli

$n=2$ prodotti $[a,b) \times [c,d)$

usiamo sempre intervalli semi aperti a dx

$[a_1,b_1) \times \cdots \times [a_n,b_n)$

Insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto se $\forall x \in A \Rightarrow \exists U_\varepsilon(x) \subset A$ dove

$U_\varepsilon(x) := \{ y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\|_* < \varepsilon \}$

L'idea dunque è di costruire f_n che approx f e $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$

Ma potrei calcolare l'integrale?

Convergenza dominata: $\lim_{n\to+\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to+\infty} f_n = \int f$

(01/10/2013)

$$X \ni x \xmapsto{d} d(x,S) \in [0,+\infty) \quad , \quad S \subset X$$

<u>Def</u> Chiamo $d(x,S)$ la <u>distanza</u> di x da S

<u>Def</u> $\{ x \in X \mid d(x,S) = 0 \} = \overline{S}$

$$\forall k \geq 1 \quad \exists x_k \in S \quad t.c. \quad d(x,x_k) - \frac{1}{k} < d(x,S) \leq d(x,x_k)$$

$$x \in \overline{S} \Rightarrow d(x,x_k) \leq d(x,S) + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k}$$

$$\exists y_{min} \in S \quad d(x,S) = d(x,y_{min})$$

Dato $x \in X$, S chiuso

$$S \ni y \longmapsto d(x,y) \geq 0$$

Lemma di Urysohn

(X,d) spazio metrico, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ chiusi $\Rightarrow \exists f : X \xrightarrow{C^0} [0,1]$ t.c. $f(F_1) = 0$, $f(F_2) = 1$

<u>dim.</u> $d(x,F_1) + d(x,F_2) > 0$ è una funz. continua $\neq 0$

$\Rightarrow [d(x,F_1) + d(x,F_2)]^{-1}$ è continua, ben def e $\neq 0$

$$f(x) := \frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1) + d(x,F_2)}$$

<u>OSS</u> $0 \leq f \leq 1$

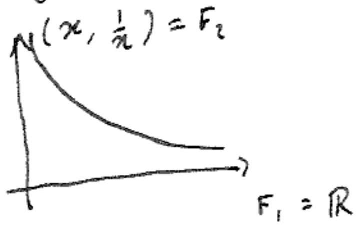
SE $x \in F_1 \Rightarrow d(x,F_1) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

SE $x \in F_2 \Rightarrow f(x) = \frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)} = 1$

$\boxtimes$

Sia $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$

voglia una $d(F_1, F_2) := \inf_{\substack{x \in F_1 \\ y \in F_2}} (d(x,y)) > 0$?



e.g. $x > 0$ $\quad d_2(x,y) = \sqrt[2]{(x-x)^2 + (0-\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{x}$

$\inf_x \{\frac{1}{x}\} = 0$

Ci servirà: $3,14159\ldots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \ldots$

Useremo: intervalli per ricoprire insiemi

(04/10/2018)

$A_j \subset X \qquad j = 1, \ldots, k$

A insieme se $\# A = n$ altrimenti $\# A + \infty$

e $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$

Se $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} A_j \Rightarrow \# A \leq \sum_{j=1}^{k} \# A_j$

Qual è la cardinalità di $I = \prod_{j=1}^{n+1} [a_j, b_j) = \underbrace{\left(\prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j)\right)}_{J \subset \mathbb{R}^n} \times [a_{n+1}, b_{n+1}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$

dico: $v(I) = v(J) \cdot (b_{n+1} - a_{n+1}) =$

$$= \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k^n} \# (J \cap \tfrac{1}{k}\mathbb{Z}^n) \cdot \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \# ([a_{n+1}, b_{n+1}) \cap \tfrac{1}{k}\mathbb{Z}) =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k^{n+1}} \# (J \cap \tfrac{1}{k}\mathbb{Z}^n) \cdot \# ([a_{n+1}, b_{n+1}) \cap \tfrac{1}{k}\mathbb{Z})$$

Formula per il volume degli intervalli

$\forall I \subset \mathbb{R}^n$ vale

$$v(I) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k^n} \# (I \cap \tfrac{1}{k}\mathbb{Z}^n)$$

dim. $n=1$ $\quad v(I) \overset{?}{=} \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \#(I \cap \frac{1}{k}\mathbb{Z})$

$I = [a,b)$, $q \geq 1$

$I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{p_1}{q}, \frac{p_1+1}{q}, \dots, \frac{p_2}{q} \right\}$ con $p_1 \leq a, < b \leq p_2$

$\#(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}) = p_2 - p_1 + 1$

$\Rightarrow [\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}) \subset I \subset [\frac{p_1-1}{q}, \frac{p_2+1}{q})$

$\Rightarrow \frac{p_2 - p_1}{q} \leq v(I) \leq \frac{p_2 - p_1 + 2}{q}$

$\Rightarrow \frac{1}{q} \operatorname{card}(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}) - \frac{1}{q} \leq v(I) \leq \frac{1}{q} \operatorname{card}(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}) + \frac{1}{q}$

$$-\frac{1}{q} \leq v(I) - \frac{1}{q}\operatorname{card}(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}) \leq \frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow \quad \left| v(I) - \frac{1}{q}\operatorname{card}(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}) \right| \leq \frac{1}{q}$$

da cui l'assert. per $q \to +\infty$

Se vale per $n-1$, $n \geq 2$

$I = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j) \Rightarrow I = [a_1, b_1) \times \prod_{j=2}^{n} [a_j, b_j) = \underset{\subset \mathbb{R}}{I_1} \times \underset{\subset \mathbb{R}^{n-1}}{I_2}$

ma siccome vale per $n-1$

$v(I_1) = \lim_{q\to+\infty} \frac{1}{q} \operatorname{card}(I_1 \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z})$, $v(I_2) = \lim_{q\to+\infty} \frac{1}{q^{n-1}} \operatorname{card}(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^{n-1})$

$v(I) = v(I_1) \cdot v(I_2) = \lim_{q\to+\infty} \frac{1}{q^n} \operatorname{card}(I_1 \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}) \operatorname{card}(I_2 \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^{n-1}) =$

$= \lim_{q\to+\infty} \frac{1}{q^n} \operatorname{card}\left((I_1 \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}) \times (I_2 \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^{n-1}) \right) =$

$= \lim_{q\to+\infty} \frac{1}{q^n} \#(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n)$

~~ES. Sia $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{[illegible]}, \mathbb{R}^d)$ e $\exists C_0 > 0$ t.c. $\|\partial_x V\| \le C_0 \|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$~~

~~Dim la prima affermazione del th 4.1~~

Lemma 1 | Se $I \subset \mathbb{R}^n$ è intervallo e $(I_j)_{1 \le j \le k}$, $k < +\infty$ famiglia d'int. in $\mathbb{R}$ che ricoprono I $\left(I \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j\right)$

$$v(I) \le \sum_{1 \le j \le k} v(I_j)$$

dim. (6-bis)

Lemma 2 | Se $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallo, $(I_j)_{j \ge 1}$ fam. numerabile di int che ric. I, allora $\left(I \subset \bigcup_{j \ge 1} I_j\right)$

$$v(I) \le \sum_{j \ge 1} v(I_j)$$

dim. (6-ter)

Lemma 3 | Se $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallo e $(I_j)_{1 \le j \le k}$ fam. finita di int 2-2 disg. in $\mathbb{R}^n$ con $I_j \subset I$ $\forall j = 1, \dots, k$, allora

$$\sum_{1 \le j \le k} v(I_j) \le v(I)$$

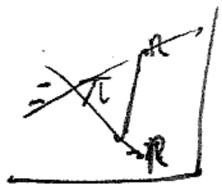
dim. (6-quater)

Lemma 4 | Se $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallo e $(I_j)_{j \ge 1}$ fam. numerabile d'intervalli 2-2 disg. in $\mathbb{R}^n$ t.c. $I_j \subset I$ $\forall j \ge 1$, allora

$$\sum_{j \ge 1} v(I_j) \le v(I)$$

dim. per Lemma 3 ho $\sum_{j=1}^{k} v(I_j) \le v(I)$ $\forall k \ge 1$

ma allora $\sum_{j \ge 1} v(I_j) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{j=1}^{k} v(I_j) \le v(I)$ ∎



(08/10/13)

Th su volume unioni numerabili

Siano $(I_j)_{j\geq 1}$ e $(J_k)_{k\geq 1}$ fam. numerabili d'intervalli in $\mathbb{R}^n$

e supponiamo che

$$\bigcup_{k\geq 1} J_k \subset \bigcup_{j\geq 1} I_j$$

e $J_k \cap J_h = \emptyset$ se $k \neq h$. allora

$$\sum_{k\geq 1} v(J_k) \leq \sum_{j\geq 1} v(I_j)$$

dim ~~(esercizio)~~

Intervalli diadici

numeri razionali decimali: $a, a_1 a_2, \dots, a_k = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_k}{10^k} = \frac{a 10^k + \dots}{10^k}$

viceversa dato $m = 10^k a + r_0$ con $0 \le r_0 < 10^k$

$$\frac{m}{10^k} = a + \frac{r_0}{10^k} = a + \frac{1}{10}\left(\frac{r_0}{10^{k-1}}\right) = a + \frac{1}{10}\left(a_1 + \frac{r_1}{10^{k-1}}\right) = \dots$$

allo stesso modo costruisco i numeri razionali <u>diadici</u>

$m \in \mathbb{Z}$: $\frac{m}{2^k} = a + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_k}{2^k}$ con $a_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

<u>Def</u> intervallo diadico

$$I := [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n) \quad , \; a_j, b_j \text{ diadici}$$

<u>Proprietà</u> non so perché ci va scritt. perché è ovvio che

$[\frac{m_1}{2^k}, \frac{m_1+1}{2^k}) \cup [\frac{m_1+1}{2^k}, \frac{m_1+2}{2^k}) \cup \dots \cup [\frac{m_2-1}{2^k}, \frac{m_2}{2^k}) = [\frac{m_1}{2^k}, \frac{m_2}{2^k})$ per ogni m_1, m_2

1) int. diadici sono sempre 2-2 disgiunti
   cioè non sovrapposti o 1 dentro l'altro

2) ogni aperto è $\cup$ di int diadici

3) ogni int. diadico è il traslato di un int. diadico

4) ogni int. diadico può essere scritto come unione di int. diadici

<u>Corollario</u> Siano $(I_j)_{j\ge 1}$ e $(J_k)_{k\ge 1}$ fam. numerabili di int in $\mathbb{R}^n$

e $\bigcup_{k\ge1} J_k = \bigcup_{j\ge1} I_j$, J_k, $k\ge1$ 2-2 disgiunti
I_j, $j\ge1$ - - - -

$$\Rightarrow \sum_{k\ge1} v(J_k) = \sum_{j\ge1} v(I_j)$$

<u>Th sulla decomposizione di insiemi aperti in intervalli</u>

$\forall U \subset \mathbb{R}^n$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists (I_j)_{j\ge1}$ succ di cubi diadici 2-2 disg. e diam $< \varepsilon$ ~~tx~~. t.c.

ts. $$U = \bigcup_{j\ge1} I_j = \bigcup_{j\ge1} \overline{I}_j$$

<u>dim.</u>

Riassumendo:

Se $U = \bigcup_{j\geq 1} I_j$ decomposizione di U in intervalli 2-2 disgiunti

(th pag. 8)

Def $v(U) := \sum_{j\geq 1} v(I_j)$

Per Corollario a Th su unioni (pag 8), $v(U)$ non dipende dalle part. scelte di $(I_j)_{j\geq 1}$

Usando Th su unioni e decomp. (pag 7-8) si può verificare che:

- $U \subset V \subset \mathbb{R}^n$ aperti $\Rightarrow v(U) \leq v(V)$
- $U_j \subset \mathbb{R}^n$, $j \geq 1$ aperti 2-2 disg.

$$\Rightarrow v\left(\bigcup_{j\geq 1} U_j\right) = \sum_{j\geq 1} v(U_j)$$

- $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset \mathbb{R}^n$ aperti, eventualmente illimitati

$$\Rightarrow v\left(\bigcup_{j\geq 1} U_j\right) = \lim_{j\to+\infty} v(U_j)$$

(22/10/2015)

Def la misura esterna (secondo Lebesgue) in $\mathbb{R}^n$ a partire dal concetto di volume di un aperto.

1) $I = \prod_{p=1}^{n} [a_p, b_p)$ $\quad a_p, b_p \in \mathbb{R} \ \forall p \geq 1$

$I = \emptyset$ $\quad (a_p \geq b_p, \exists p)$ | $I \neq \emptyset$ $\quad (a_p < b_p \ \forall p)$

$v(I) = 0$ | $v(I) = \prod_{p=1}^{n} (b_p - a_p) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \#(I \cap \frac{1}{k}\mathbb{Z}^n)$

2) $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto

$\exists (I_j)_{j \geq 1}$ t.c. $U = \bigcup_{j \geq 1} I_j$ $\quad I_j \cap I_k = \emptyset$ SE $j \neq k$

$\Rightarrow v(U) = \sum_{j \geq 1} v(I_j)$ che non dipende da decomposizione

$U \subset \bigcup_{k \geq 1} J_k$, ma $\exists (I_j)_{j \geq 1}$ t.c. $U = \bigcup_{j \geq 1} I_j$ 2-2 disg.

$\Rightarrow \sum_{j \geq 1} v(I_j) \leq \sum_{k \geq 1} v(J_k) \Rightarrow v(U) \leq \sum_{k \geq 1} v(J_k)$

ma allora $\forall (J_k)_{k \geq 1}$ t.c. $U \subseteq \bigcup_{k \geq 1} J_k$ posso dire che

$v(U) \leq \sum_{k \geq 1} v(J_k) \Rightarrow$ in particolare $v(U) \leq \inf_{\substack{(J_k)_{k \geq 1} \\ U \subseteq \bigcup_{k \geq 1} J_k}} \sum_{k \geq 1} v(J_k)$

3) $S \subset \mathbb{R}^n$ qualsiasi posso dire?

$|S|_e := \inf_{\substack{(J_k)_{k \geq 1} \\ S \subseteq \bigcup_{k \geq 1} J_k}} \sum_{k \geq 1} v(J_k)$ Sarà la misura esterna di Lebesgue

Una buona misura deve garantirmi anche che se

$S_1, S_2, \dots,$ sono 2-2 disgiunti

$\left| \bigcup_{j \geq 1} S_j \right|_e = \sum_{j \geq 1} |S_j|_e$

$S \subset \mathbb{R}^n$

$|S|_e = \inf_{\substack{U \\ S \subseteq U}} |U|_e$

$|\emptyset|_e = 0$ $\quad \emptyset = \bigcup_{k \geq 1} [k, k)^n$

Sia dunque

Def $S \subset \mathbb{R}^n$, la <u>misura</u> <u>esterna</u> di <u>Lebesgue</u> è

$$|S|_e := \inf_{\substack{(J_k)_{k\geq 1} \\ S \subseteq \bigcup_{k\geq 1} J_k}} \sum_{k\geq 1} v(J_k)$$

<u>Proprietà</u>:

1. $|\emptyset|_e = 0$

infatti: $\emptyset = \prod_{k=1}^{n} [q, q)$, $q \in \mathbb{R}$

$$v\left(\prod_{k=1}^{n} [q,q)\right) = (q-q)^n = 0$$

$$v(J) \geq 0 \quad \forall J \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \inf_{\substack{J_k \subset \mathbb{R} \\ \emptyset \subset J}} \sum v(J_k) = 0$$

2. $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow |S_1|_e \leq |S_2|_e$

se $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow \forall I_k, k\geq 1$ t.c. $S_2 \subseteq \bigcup_{k\geq 1} I_k$ ~~decomp.~~

$\exists I_{k_n}, k_n \geq 1$ ~~sotto decom. di S_2~~

t.c. $\bigcup_{k_n\geq 1} I_{k_n} \subseteq \bigcup_{k\geq 1} I_k$ e $S_1 \subset \bigcup_{k_n\geq 1} I_{k_n}$

ma allora $\bigcup_{k_n\geq 1} I_{k_n} \subset \bigcup_{k\geq 1} I_k \Rightarrow \sum_{k_n\geq 1} v(I_{k_n}) \leq \sum_{k\geq 1} v(I_k)$

e $|S_1|_e = \inf_{\substack{I_{k_n} \\ S_1 \subset I_{k_n}}} \sum_{k_n\geq 1} v(I_{k_n}) \leq \inf_{\substack{I_k \\ S_2 \subset I_k}} \sum_{k\geq 1} v(I_k)$ (monotonia)

3. Dati: $S_1, S_2, \ldots$ $\Rightarrow$ se $S = \bigcup_{k\geq 1} S_k$ si ha $|S|_e \leq \sum_{k\geq 1} |S_k|_e$

(FG 18)

A questo punto non ci resta che definire

Def $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice <u>misurabile</u> (secondo Lebesgue) se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $E \subset U_\varepsilon$ t.c.

$$|U_\varepsilon \setminus E|_e < \varepsilon$$

Def $\Sigma := \{ E \subset \mathbb{R}^n \mid E \text{ misurabile secondo Lebesgue} \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

Dovremmo dimostrare la stabilità per $\cap$ o $\cup$ di Σ

Proprietà:

- aperti $\subset \Sigma$
- E misurabile $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus E$ misurabili
- $E_1, E_2, E_3, \ldots \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{h \geq 1} E_h \in \Sigma$, $\bigcap_{h \geq 1} E_h \in \Sigma$
- $E, E' \in \Sigma \Rightarrow E \setminus E' \in \Sigma$ (vedi come $E \cap (\mathbb{R}^n \setminus E')$)
- $E_1, E_2, \ldots \in \Sigma$, 2-2 disgiunti: $\bigcup_{h \geq 1} E_h \in \Sigma$ e $\left|\bigcup_{h\geq 1} E_h\right|_e = \sum_{h \geq 1} |E_h|_e$

OSS: ~~uso aperti intervalli perché posso usare la decomp.~~ $\cancel{U = \bigcup_{h \geq 1} I_h}$

Ricapitolo: intervalli di $\mathbb{R}^n$ $\quad I = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_n, b_n)$

1) $v(I) := (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) = \lim_{q \to +\infty} \frac{1}{q^n} \operatorname{card}(I \cap \frac{1}{q} \mathbb{Z}^n)$ (4)
2) $I \subset \bigcup_{j \geq 1} I_j \Rightarrow v(I) \leq \sum_{j \geq 1} v(I_j)$ (6) lemma 1/2
3) $\bigcup_{j \geq 1} I_j \subset I$, I_j 2-2 disg. $\Rightarrow \sum_{j \geq 1} v(I_j) \leq v(I)$ (6 - lemma 3/4)
4) $\left.\begin{matrix} I_1, I_2, \ldots \\ J_1, J_2, \ldots \end{matrix}\right\}$ intervalli di $\mathbb{R}^n$ e ($J_1, J_2, \ldots$ 2-2 disgiunti) (7)

   Se $\bigcup_{h \geq 1} J_h \subset \bigcup_{j \geq 1} I_j \Rightarrow \sum_{h \geq 1} v(J_h) \leq \sum_{j \geq 1} v(I_j)$
5) $\left.\begin{matrix} I_1, I_2, \ldots \\ J_1, J_2, \ldots \end{matrix}\right\}$ intervalli di $\mathbb{R}^n$ e $\left.\begin{matrix} I_1, I_2, \ldots \\ J_1, J_2, \ldots \end{matrix}\right\}$ 2-2 disgiunti (8)

   Allora se $\bigcup_{k \geq 1} J_k \subseteq \bigcup_{j \geq 1} I_j \Rightarrow \sum_{k \geq 1} v(J_k) = \sum_{j \geq 1} v(I_j)$

Proprietà della misura

1) Def $E \subset \mathbb{R}^n$ è <u>misurabile</u> secondo Lebesgue se $\forall \varepsilon > 0\ \exists U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ aperto con $E \subset U_\varepsilon$ t.c. $|U_\varepsilon \setminus E|_e < \varepsilon$

2) dalla def segue che U aperto $\Rightarrow U$ misurabile

3) I intervallo $\Rightarrow I$ misurabile

dim. $I = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon := (a_1 - \varepsilon, b_1) \times \dots \times (a_n - \varepsilon, b_n) \supset I$

$U_\varepsilon \setminus I = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ t.c. } a_j - \varepsilon < x_j < a_j \ \forall j = 1, \dots, n \right\}$

ma $U_\varepsilon \setminus I$ è aperto e allora si scrive che unione di intervalli ~~diadici~~ 2-2 disgiunti

in pratica in ogni int di $\mathbb{R}$ che compone l'insieme vale un rapp.?

in particolare $U_\varepsilon \setminus I = \bigcup_{j_0=1}^{n} (a_1 - \varepsilon, a_1) \times \dots \times (a_{j_0-1} - \varepsilon, a_{j_0-1}) \times (a_{j_0} - \varepsilon, a_{j_0}) \times (a_{j_0+1} - \varepsilon, a_{j_0}) \times \dots \times (a_n - \varepsilon, a_n) \subset$

$\exists j_0,\ 1 \le j_0 \le 1$ t.c. $x_{j_0} < a_{j_0}$ t.c.?

$\subset \bigcup_{j_0=1}^{n} [a_1 - \varepsilon, a_1) \times \dots$

$$\Rightarrow |U_\varepsilon \setminus I|_e \le \sum_{j=1}^{n} (a_1 - a_1 + \varepsilon) \cdots (a_n - a_n + \varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^n \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \quad \blacksquare$$

4) $E \subset \mathbb{R}^n$, $|E|_e = 0 \Rightarrow E$ misurabile

dim. $\forall \varepsilon > 0\ \exists I_1, I_2, \dots$ intervalli t.c. $E \subset \bigcup_{j \ge 1} (I_j)$ e $\sum_{j \ge 1} v(I_j) < \varepsilon$

(perché $|E|_e = \inf \sum v(I_j)$)

ma $\forall j \ge 1\ \exists U_j \supset I_j$ t.c. $|U_j \setminus I_j|_e < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ per def di misurabilità

$\Rightarrow E \subset \bigcup_{j \ge 1} I_j \subset \bigcup_{j \ge 1} U_j = U_\varepsilon$ aperto perché unione di aperti

$$U_\varepsilon \setminus E = \left(U_\varepsilon \setminus \bigcup_{j \ge 1} I_j\right) \cup \left(\bigcup_{j \ge 1} I_j \setminus E\right) \subset \underbrace{\left(\bigcup_{k \ge 1} U_k \setminus \bigcup_{j \ge 1} I_j\right)}_{\bigcup_{k \ge 1} (U_k \setminus \bigcup_{j \ge 1} I_j)} \cup \bigcup_{j \ge 1} I_j$$

$$\Downarrow \ |U_\varepsilon \setminus E|_e \le \sum_{k \ge 1} \Big| U_k \setminus \bigcup_{j \ge 1} I_j \Big|_e + \sum_{j \ge 1} |I_j|_e$$

$$\le \sum_{k \ge 1} |U_k \setminus I_k|_e + \sum_{j \ge 1} |I_j|_e \le \sum_{k \ge 1} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \sum_{j \ge 1} v(I_j) = \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon = \varepsilon' \quad \blacksquare$$

$\Sigma = \{ E \subset \mathbb{R}^n \mid E \text{ misurabile} \}$

1) $E_1, E_2, \dots \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{j \geq 1} E_j \in \Sigma$

dim. $\forall j$, $E_j \in \Sigma \Rightarrow \exists\, U_j$ t.c. $E_j \subset U_j$ e $|U_j \setminus E_j|_e < \frac{\varepsilon}{2^j}$

chiamo $U = \bigcup_{j \geq 1} U_j$ aperto che contiene $\bigcup_{j \geq 1} E_j$

considero $U \setminus \bigcup_{j \geq 1} E_j = \bigcup_{k \geq 1} U_k \setminus \bigcup E_j = \bigcup_{k \geq 1} (U_k \setminus \bigcup_{j \geq 1} E_j) \subset \bigcup_{k \geq 1} (U_k \setminus E_k)$

$\Rightarrow |U \setminus \bigcup_{j \geq 1} E_j|_e \leq \sum_{k \geq 1} |U_k \setminus E_k|_e \leq \sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$

$\Rightarrow \bigcup_{j \geq 1} E_j$ è misurabile

NOTAZIONE: $E \subset \mathbb{R}^n$, E si dice G_δ se $E = \bigcap_{j \geq 1} U_j$ U_j aperti

$E \subset \mathbb{R}^n$, E si dice F_σ se $E = \bigcup_{j \geq 1} F_j$ F_j chiusi

OSS: si può dimostrare che F chiuso $\Rightarrow F$ è G_δ, G aperto $\Rightarrow G$ è F_σ, $F, G \subset \mathbb{R}^n$

Prop. $S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Def $d(\underline{x}, S) = \inf_{y \in S} |\underline{x} - \underline{y}|$. Allora la funzione $\underline{x} \mapsto d(\underline{x}, S) \in [0, +\infty]$ è continua e di Lipschitz ($L = 1$)

dim. $d(\underline{x}, S) \leq |\underline{x} - \underline{y}| \quad \forall y \in S$

$|\underline{x} - \underline{y}| \leq |\underline{x} - \underline{x}'| + |\underline{x}' - \underline{y}| \quad \forall \underline{y} \in S$

$\cancel{d(\underline{x}, S) - |\underline{x} - \underline{x}'| \leq |\underline{x}' - \underline{y}|}$

$|\underline{x} - \underline{y}| - |\underline{x}' - \underline{y}| \leq |\underline{x} - \underline{x}'|$

ma $d(\underline{x}, S) \leq |\underline{x} - \underline{y}|$ e $d(\underline{x}', S) \leq |\underline{x}' - \underline{y}|$

$\Rightarrow d(\underline{x}, S) - d(\underline{x}', S) \leq |\underline{x} - \underline{y}| - |\underline{x}' - \underline{y}| \leq |\underline{x} - \underline{x}'|$ ~~che è def di lipschitzianità~~

posso anche scrivere

$\cancel{-(d(\underline{x}, S) - d(\underline{x}', S)) \leq |\underline{x} - \underline{y}| \leq |\underline{x} - \underline{x}'| - |\underline{x}' - \underline{y}|}$

$\cancel{d(\underline{x}, S) - d(\underline{x}', S) \leq |\underline{x} - \underline{x}'| \Rightarrow (}$

$-(d(\underline{x}, S) - d(\underline{x}', S)) = d(\underline{x}', S) - d(\underline{x}, S) \leq |\underline{x}' - \underline{x}| = |\underline{x} - \underline{x}'|$

$\Rightarrow d(\underline{x}, S) - d(\underline{x}', S) \geq -|\underline{x} - \underline{x}'|$

mett. insieme e h.

$|d(x, S) - d(x', S)| \leq |x - x'|$ C.V.D.

Proposizione $\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(x,S) = 0 \}$ è chiuso e contiene S, in particolare è $\bar{S}$

Proposizione F chiuso $\Rightarrow$ F è G_δ

dim. se $F = \emptyset$ è ovvio

se $F \neq \emptyset$ ho che $F \subset U_k = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{x}, F) < \frac{1}{k} \}$ e

U_k è aperto perché c.i. di $(-\infty, \frac{1}{k})$ tramite $d(\cdot, F)$

$d(\cdot, F) : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$

ma $\bigcap_{k \geq 1} U_k = \{ x \in \mathbb{R}^n : d(x, F) = 0 \} = \bar{F} = F$ (F chiuso) C.V.D.

Corollario U aperto $\Rightarrow$ U è F_σ

dim. U aperto $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus U$ chiuso $\Rightarrow$ $\exists V_k$ aperti t.c. $\mathbb{R}^n \setminus U = \bigcap_{k \geq 1} V_k \Rightarrow U = \bigcup_{k \geq 1} \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus V_k}_{\text{chiusi}}$ CVD

Alcune proprietà distanza

Def $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $A, B \neq \emptyset$ $\quad d(A,B) = \inf_{(x,y) \in A \times B} |\underline{x} - \underline{y}| \in [0, +\infty)$

1) $d(A,B) = 0$ se $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$

 se $\underline{x} \in \bar{A} \cap \bar{B} \Rightarrow \exists \underline{x}_k \in A$, $\underline{y}_k \in B$ t.c. $\begin{matrix} x_k \\ y_k \end{matrix} \to \underline{x}$

$|\underline{x}_k - \underline{y}_k| = |\underline{x}_k - \underline{x} + \underline{x} - y_k| \leq |\underline{x}_k - \underline{x}| + |\underline{x} - \underline{y}_k| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

C.V.D.

2) $d(A,B) = 0 \Rightarrow ?$ $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$ NO

ad esempio: $A = \{ (x, \frac{1}{x}) \mid x > 0 \}$, $B = \{ (x, 0) \}$ sono sicuramente disgiunti ($\frac{1}{x} \neq 0 \ \forall x > 0$)

ma $\forall k > 0$ $\exists \underline{x}_k \in A$, $y_k \in B$ t.c. $|\underline{x}_k - \underline{y}_k| < \frac{1}{k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

$\underline{x}_k = (k+1, \frac{1}{k+1})$ $\quad \underline{y}_k = (k+1, 0)$

$|\underline{x}_k - \underline{y}_k| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{k+1} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ $\quad \forall k \geq 0$ C.V.D.

OSS: non ho limitatezza di A e B

3) $d(A,B) = 0$ e $\bar{A}$ compatto $\Rightarrow$ $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$

dim. infatti: $\forall \underline{x}_k \in A$ $\exists k_j$ t.c. $x_{k_j} \to x \in \bar{A}$. Sia $y_{k_j} \in B$

$|\underline{y}_{k_j} - \underline{x}| \leq |\underbrace{y_{k_j} - x_{k_j}}_{\text{per ipotesi } d(A,B)=0}| + |\underbrace{x_{k_j} - x}_{\to 0}| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \Rightarrow y_{k_j} \xrightarrow[j \to +\infty]{} \underline{x} \Rightarrow \underline{x} \in \bar{B}$

$\Rightarrow \bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$ C.V.D.

3) bis) A, B chiusi, $A \cap B = \emptyset$ e uno dei due limitato $\Rightarrow d(A,B) > 0$

4) K compatto di $\mathbb{R}^n$ ($\Rightarrow$ chiuso), F chiuso di $\mathbb{R}^n$, $K \cap F = \emptyset \Rightarrow d(K,F) > 0$

Tornando alla misura

2) $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$, $d(E_1, E_2) = \delta > 0 \Rightarrow |\underbrace{E_1 \cup E_2}_{E}|_e = |E_1|_e + |E_2|_e$

dim. $\geq$ divido in 2 casi:

- se $|E_1 \cup E_2|_e = +\infty \Rightarrow +\infty = |E_1 \cup E_2|_e \leq |E_1|_e + |E_2|_e$ (per sub-addit.)

ma allora $|E_1|_e + |E_2|_e = +\infty \geq |E_1 \cup E_2|_e$

- se $|E_1 \cup E_2|_e \lneq +\infty$ $E := E_1 \cup E_2$

~~per def~~ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U$ aperto t.c. $E \subset U$ e $|U|_e < |E|_e + \varepsilon$

$D_1 := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\underline{x}, E_1) < \frac{\delta}{2}\} \supset E_1$

$D_2 := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\underline{x}, E_2) < \frac{\delta}{2}\} \supset E_2$

D_1, D_2 sono aperti

inoltre $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

Se così non fosse, $\exists\, \underline{x} \in D_1 \cap D_2$ e si avrebbe $d(x, E_1) < \frac{\delta}{2}$
dunque $\exists x_1 \in E_1$ t.c. $|x - x_1| < \frac{\delta}{2}$ e $d(x, E_2) < \frac{\delta}{2}$ cioè
$\exists x_2 \in E_2$ t.c. $|x - x_2| < \frac{\delta}{2}$. Ma allora
$|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x| + |x - x_2| < \delta$ che contraddice ~~$d(E_1,E_2) > \delta$~~
$d(E_1, E_2) = \delta$ ↯

Siano allora $U_1 := U \cap E_1$ e $U_2 := U \cap E_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

Si ha $|E_1|_e + |E_2|_e \leq |U_1|_e + |U_2|_e \leq |U|_e \lneq |E_1 \cup E_2|_e + \varepsilon$

ma vale $\forall \varepsilon \Rightarrow |E_1 \cup E_2|_e \geq |E_1|_e + |E_2|_e$

Ricordo che $|\bigcup_{j \geq 1} E_j|_e \leq \sum_{j \geq 1} |E_j|$ (sub-additività) 11

dunque ho il $\geq$ + $\leq$ da ~~sub~~-add $\Rightarrow$ ho $=$ $\boxed{\text{C.V.D.}}$

Completo la dimostrazione con le seguenti due Proposizioni

Prop. Dati: U, V aperti, $U \cap V = \emptyset$

$\Rightarrow |U \cup V|_e = |U|_e + |V|_e$

dim. U aperto $\Rightarrow U = \bigcup_{j\geq 1} I_j$ $\quad I_j$ 2-2 disg.

V aperto $\Rightarrow V = \bigcup_{k\geq 1} V_k$ $\quad V_k$ 2-2 disg.

$\Rightarrow U \cup V = \left(\bigcup_{j\geq 1} I_j\right) \mathring{\cup} \left(\bigcup V_k\right)$ $\qquad \mathring{\cup}$ = unione disgiunta

ma solo perché 2-2 disgiunti

ho $|U|_e = |\bigcup_{j\geq 1} I_j|_e = \sum_{j\geq 1} v(I_j)$ e $|V|_e = |\bigcup_{k\geq 1} V_k|_e = \sum_{k\geq 1} v(V_k)$

$\Rightarrow |U \cup V|_e = |\bigcup_{j\geq 1} I_j \mathring{\cup} \bigcup_{k\geq 1} V_k| = |\bigcup_{j\geq 1} I_j|_e + |\bigcup_{k\geq 1} V_k| = |U|_e + |V|_e$

C.V.D.

Prop. $|E|_e = \inf_{\substack{E \subset U \\ \text{aperto}}} |U|_e$

dim. Se $|E|_e = +\infty$ OK

Se $|E|_e < +\infty$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists (I_j)_{j\geq 1}$ ricoprimento di E

$\Rightarrow E \subset \bigcup_{j\geq 1} I_j$ e $\sum_{j\geq 1} v(I_j) < |E|_e + \frac{\varepsilon}{2}$ (*)

$\forall j \geq 1$ fissato

$I_j = [a_1^j, b_1^j) \times \dots \times [a_n^j, b_n^j)$

$U_j := (a_1^j - \varepsilon_j, b_1^j) \times \dots \times (a_n^j - \varepsilon_j, b_n^j) \supset I_j$ per $\varepsilon_j > 0$

riconosco che scelgo ε apposta

$v(U_j) = \prod_{i=1}^{n} (b_i^j + \varepsilon_j - a_i^j) < v(I_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$

inoltre $U_j \subset [a_1^j - \varepsilon_j, b_1) \times \dots \times [a_n^j - \varepsilon_j, b_n^j) =: J_j$

e dunque $\forall j \geq 1$, $\varepsilon > 0$ posso scegliere

$I_j \subset U_j \subset J_j$ e $v(J_j) < v(I_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$

da $|E|_e < +\infty$ e $E \subset \bigcup_{j\geq 1} I_j \subset \bigcup_{j\geq 1} U_j \subset \bigcup_{j\geq 1} J_j$

ho $|U|_e \leq \sum_{j\geq 1} v(J_j) \leq \sum_{j\geq 1} v(I_j) + \sum_{j\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \overset{(*)}{<} |E|_e + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow |U|_e < |E|_e + \varepsilon$ $\qquad$ C.V.D.

NOTA: quanto dimostrato è diverso da $|U \setminus E|_e < \varepsilon$

3) F chiuso $\Rightarrow$ F misurabile

dim. con K compatto è più facile. Sia dunque $K \subset \mathbb{R}^n$

Per quanto appena visto: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underset{\text{aperto}}{U} \supset K$ con $|U|_e < |K|_e + \varepsilon$

Se $K \subset U$ è chiuso $\Rightarrow U \setminus K$ è aperto $\Rightarrow \exists (I_j)_{j \geq 1}^{\text{2-2 disg}}$ t.c. $(U \setminus K) = \bigcup_{j \geq 1} I_j$

e $U = K \cup (U \setminus K) = K \cup (\bigcup_{j \geq 1} I_j)$. Ma la compattezza di K mi assicura che

Richiamo

Def $E \subset \mathbb{R}^n$ $\quad |E|_e = \inf_{\substack{(I_j)_{j\geq 1} \\ E \subset \bigcup_{j\geq 1} I_j}} \sum_{j\geq 1} v(I_j)$

Proprietà
1) $|\emptyset|_e = 0$
2) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow |E_1|_e \leq |E_2|_e$
3) $|\bigcup_{j\geq 1} E_j|_e \leq \sum_{j\geq 1} |E_j|_e$

Def $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice misurabile (secondo Lebesgue) se $\forall \varepsilon > 0\ \exists U_\varepsilon$ aperto t.c. $|U_\varepsilon \setminus E|_e < \varepsilon$

Proprietà
1) intervalli, aperti e chiusi sono misurabili
2) $E_1, E_2, \dots$ misurabili $\Rightarrow \bigcup_{j\geq 1} E_j$ misurabile
3) $|E|_e = 0 \Rightarrow E$ misurabile
4) $E_1, E_2, \dots$ misurabili $\Rightarrow \bigcap_{j\geq 1} E_j$ misurabile
5) G_δ, F_σ misurabili
6) E_1, E_2 misurabili $\Rightarrow E_1 \setminus E_2$ misurabili

OSS: E mis $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus E$ misurabile

infatti E mis. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists U_\varepsilon$ t.c. $E \subset U_\varepsilon$ e $|U_\varepsilon \setminus E| < \varepsilon$

scelgo $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $\forall k \geq 1$ $\quad \exists U_k$ t.c. " "

ma $E \subset U_k\ \forall k \Rightarrow E \subset \bigcap_{k\geq 1} U_k$ cioè è G_δ

considero $\bigcap_{k\geq 1} U_k \setminus E \subset U_k \setminus E \quad \forall k \geq 1$

$\Rightarrow |\bigcap_{k\geq 1} U_k \setminus E|_e \leq |U_{k_0} \setminus E|_e \leq \frac{1}{k_0} \quad \forall k_0 \Rightarrow = 0$

$\mathbb{R}^n \setminus E \supset \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k\geq 1} U_k = \bigcup_{k\geq 1} (\mathbb{R}^n \setminus U_k) =: S$ mis. | ma $\mathbb{R}^n \setminus U_k$ è chiuso $\Rightarrow$ misurabile $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k\geq 1} U_k$ è unione di misurabili $\Rightarrow$ è misurabile

$(\mathbb{R}^n \setminus E) \setminus S = (\mathbb{R}^n \setminus E) \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) =$

$= (\mathbb{R}^n \setminus E) \cap (\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k\geq 1} U_k)) = (\mathbb{R}^n \setminus E) \cap (\bigcap_{k\geq 1} U_k) = (\bigcap_{k\geq 1} U_k) \setminus E$

ma allora $|(\mathbb{R}^n \setminus E) \setminus S|_e = |\bigcap_{k\geq 1} U_k \setminus E|_e = 0$

ora $\mathbb{R}^n \setminus E = S \cup (\bigcap U_k \setminus E) = \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k\geq 1} U_k)}_{\text{mis}} \cup \underbrace{(\bigcap_{k\geq 1} U_k \setminus E)}_{\text{mis} = 0 \Rightarrow \text{mis}} \Rightarrow$ misur.

C.V.D.

Prop. $E_1, E_2, \dots$ mis $\Rightarrow \bigcap_{j\geq 1} E_j$ mis.

dim. $\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k\geq 1} E_j = \bigcup_{j\geq 1} (\mathbb{R}^n \setminus E_j)$ unione di misurabili $\Rightarrow$ misurabile $\Rightarrow$ il suo complementare $\bigcap E_j$ è misurabile

Def Sia X un insieme e $\mathcal{P}(X)$ l'ins. delle parti

sia $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(X)$ t.c.

1) $\emptyset \in \mathcal{X}$
2) Se $A \in \mathcal{X} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{X}$
3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{X} \Rightarrow \bigcup_{j\geq 1} A_j \in \mathcal{X}$
4) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{X} \Rightarrow \bigcap_{j\geq 1} A_j \in \mathcal{X}$

Allora $\mathcal{X}$ si dice σ-algebra

OSS: per le prop. dimostrate $\Sigma = \{E \subset \mathbb{R}^n : E \text{ misurabile}\}$ è σ-algebra

Criteri per la misurabilità

(33?)

1) $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile $\Leftrightarrow \exists B \supset E$, B di tipo G_δ t.c. $|B \setminus E|_e = 0$

dim. $\Rightarrow$) già visto $E = B \setminus (B \setminus E)$ $\cancel{E = A \bigcup_{k\geq1} U_k \setminus (\bigcap_{k\geq 1} U_k \setminus E)}$

$\Leftarrow$) $E = \underset{\text{mis}}{B} \setminus \underset{\text{mis}=0 \Rightarrow \text{mis.}}{(B \setminus E)} \Rightarrow E$ mis. C.V.D.

$E_1 \setminus E_2 = \overset{\text{mis}}{E_1} \cap \overset{\text{mis}}{(\mathbb{R}^n \setminus E_2)} \Rightarrow$ mis

2) $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile $\Leftrightarrow \exists A \subset E$, A F_σ t.c. $|E \setminus A|_e = 0$

dim. $\Rightarrow$) E misurabile $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus E$ misurabile $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus E \subset B$, B G_δ t.c. $|B \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)|_e = 0$

$\mathbb{R}^n \setminus E \subset B \Rightarrow E \supset \mathbb{R}^n \setminus B$

Prop. a) $E_1, E_2, \dots \in \Sigma$ 2-2 disg $\Rightarrow |\bigcup_{j\geq 1} E_j|_e = \sum_{j\geq 1} |E_j|_e$ (additività)

b) $E \in \Sigma \Rightarrow |E| = |E|_e$ (def di misura di Lebesgue)

dim. a) ho già che se E_j misurabili, 2-2 disg e limitati $\Rightarrow$ vale $\leq$

ho bisogno del $\geq$

consideriamo $k \geq 1$ e $\forall\, 1 \leq j \leq k$ ho

$\forall \varepsilon > 0 \quad E_j \supset F_j \quad |E_j \setminus F_j| < \varepsilon$ | (infatti E_j misurabile $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus E_j$ misurabile $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus E_j \subset U_j$ aperto t.c. $|U_j \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E_j)|_e < \varepsilon$ $\Rightarrow E_j \supset \mathbb{R}^n \setminus U_j \Rightarrow |E_j \setminus (\mathbb{R}^n \setminus U_j)|_e < \varepsilon$)

F_j chiuso e limitato (E_j è limitato)

$\Rightarrow$ è compatto

$$\bigcup_{j\geq 1} E_j \supset \bigcup_{j=1}^{k} F_j \Rightarrow |\bigcup_{j\geq 1} E_j|_e \geq |\bigcup_{j=1}^{k} F_j|_e = \sum_{j=1}^{k} |F_j|_e$$

ma $E_j = F_j \cup (E_j \setminus F_j) \Rightarrow |E_j|_e \leq |F_j|_e + |E_j \setminus F_j|_e = |F_j|_e + \varepsilon$

$\Rightarrow |F_j|_e \geq |E_j|_e - \varepsilon$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} |F_j|_e \geq \sum_{j=1}^{k} (|E_j|_e - \varepsilon) = \sum_{j=1}^{k} |E_j|_e - k\varepsilon$$

per arbitrarietà di ε

$$|\bigcup_{j\geq 1} E_j|_e \geq \sum_{j=1}^{k} |F_j|_e \geq \sum_{j=1}^{k} |E_j|_e$$ passando al limite ho l'asserto $\boxed{\text{C.V.D.}}$

ma nel CASO GENERALE:

E_j 2-2 disg

Scrivo $\mathbb{R}^n$ con $\bigcup$ numerabile di ins. 2-2 disg.

$C_0 = [-1,1]^n$

$C_k = ([-k-1, k+1] \times \dots \times [-k-1, k+1]) \setminus ([-k,k] \times \dots \times [-k,k]) \quad k \geq 1$

$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\geq 0} C_k \qquad \supseteq$ è ovvio

per $\subseteq$, sia $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ma allora $\exists k \geq 0$ t.c. $\vec{x} \in [-k-1, k+1]^n$ e scelgo il più piccolo k per cui vale ok

ma allora

eventualmente $E_0 = \emptyset$

$$|\bigcup_{j\geq 1} E_j|_e = |(\bigcup_{k\geq 0} C_k) \cap (\bigcup_{j\geq 1} E_j)|_e = |\bigcup_{k\geq 0} (C_k \cap \bigcup_{j\geq 0} E_j)|_e =$$

$= |\bigcup_{\substack{k\geq 0 \\ j\geq 0}} C_k \cap E_j|_e =$ ma questa unione numerabile di ins. limit. 2-2 disg.

$$= \sum_{\substack{k\geq 0 \\ j\geq 0}} |C_k \cap E_j|_e = \sum_{j\geq 0} \sum_{k\geq 0} |C_k \cap E_j|_e = \sum_{j\geq 0} |E_j|_e$$

perché $\forall j \quad E_j = \mathbb{R}^n \cap E_j = (\bigcup_{k\geq 0} C_k \cap E_j) = \bigcup_{k\geq 0} (C_k \cap E_j)$

$\Rightarrow |E_j|_e = \sum_{k\geq 0} |C_k \cap E_j|_e$