1 Esercizio Svolto

Risolvere la seguente espressione matematica

$$\frac{-4\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right):\left(\frac{7}{30}-\frac{5}{12}\right)-\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}\right):\left(-\frac{3}{2}\right)\right]}{\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)-\left[-2^2\cdot\left(3-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left(3+\frac{1}{2}\right)\right]}$$

2 Soluzione

Ricordiamo che all'interno di una espressione l'ordine delle operazioni da svolgere è dato dalle parentesi (prima tonde, poi quadre, infine graffe), e che le potenze vanno svolte prima di ogni altra operazione. Resta valida la regola di eseguire prima moltiplicazioni e divisioni nell'ordine in cui compaiono, poi somme e sottrazioni, sempre nell'ordine in cui compaiono.

Per questo motivo svolgiamo prima le due potenze che compaiono in questa espressione.

$$\frac{-4\cdot\frac{4}{9}\cdot \left[\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right):\left(\frac{7}{30}-\frac{5}{12}\right)-\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}\right):\left(-\frac{3}{2}\right)\right]}{\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)-\left[-4\cdot\left(3-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left(3+\frac{1}{2}\right)\right]} \tag{1}$$

Il lettore avrà certamente notato che abbiamo scritto $-2^2 = -4$. A prima vista sembra un errore, in quanto ci viene sempre detto che le potenze pari sono positive. In questo caso pero il trabocchetto è presto spiegato: in assenza di parentesi che indichino il contrario, le potenze hanno la priorità sulle altre operazioni. Inoltre è utile ricordare che quando scriviamo -2 in realtà intendiamo $(-1)\cdot(2)$. Dunque riscriviamo

$$-2^2 = (-1)\cdot(2^2)$$

e quindi è chiara l'uguaglianza scritta sopra. A questo punto dobbiamo seguire l'ordine indicato dalle parentesi.

$$\frac{-4\cdot\frac{4}{9}\cdot \left[\left(\frac{6-5}{30}\right):\left(\frac{14-25}{60}\right)-\left(\frac{10-9}{6}\right):\left(-\frac{3}{2}\right)\right]}{\left(\frac{9-5}{15}\right)-\left[-4\cdot\left(\frac{6-1}{2}\right)+2\cdot\left(\frac{6+1}{2}\right)\right]} \tag{2}$$

È facile a questo punto proseguire autonomamente.

OSSERVAZIONE 1 *Nella risoluzione di questo tipo di espressioni è molto importante l'utilizzo delle proprietà elementari delle moltiplicazioni e delle divisioni e delle proprietà delle potenze.*
Vediamo per esempio la seguente espressione

$$-3^2+\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right):\left(-\frac{9}{4}\right)^2\right] \tag{3}$$

Pensare di risolvere questa espressione senza utilizzare le proprietà di potenze, moltiplicazioni e divisioni può sicuramente portare al risultato giusto con molti calcoli (in realtà l'espressione è molto semplice e non presenta grandi problemi). Utilizzare correttamente invece le proprietà delle operazioni elementari può essere una strategia decisamente migliore e, soprattutto in caso di espressioni molto lunghe, molto più rapida.

Iniziamo con il notare subito che il primo termine che compare è -3^2 *può essere riscritto come* $(-1)\cdot(3)^2$. *In generale questo vale per ogni numero relativo (intero, razionale o reale che sia). Ad esempio:*

$$-2 = (-1)\cdot(2)$$

$$-5 = (-1)\cdot(5)$$

$$-\frac{2}{5} = (-1)\cdot\frac{2}{5}$$

$$-\pi = (-1)\cdot(\pi)$$

Alla luce di questo fatto si può concludere senza ulteriori dubbi che $-3^2 = (-1)\cdot(3)^2$ *e infine, ricordando che le potenze hanno priorità sulle altre operazioni,* $(-1)\cdot(3)^2 = -9$.

Per quanto riguarda le altre operazioni presenti, si tratta di moltiplicazioni e divisioni tra potenze. Una strategia poco furba potrebbe essere quella di svolgere le potenze singolarmente e poi svolgere le operazioni nell'ordine. Tuttavia un piccolo sguardo alle frazioni può semplificare di molto i conti.
Osserviamo intanto che

$$-\frac{9}{4} = (-1)\cdot\frac{9}{4} = (-1)\cdot\frac{3^2}{2^2} = (-1)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 \tag{4}$$

Dunque osserviamo anche che

$$\left(-\frac{9}{4}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 \tag{5}$$

Infine considerando le ultime due uguaglianze (4) e (5) insieme

$$\left(-\frac{9}{4}\right)^2 = \left((-1)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^2 = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 \tag{6}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la (5) al contrario.
A questo punto l'equazione (3) diventa

$$-9 + \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) : \left(-\frac{3}{2}\right)^4\right] \tag{7}$$

Nella parentesi quadra troviamo 3 operazioni tra potenze con la stessa base ed esponenti diversi. È noto che il risultato è una potenza con la stessa base e con esponente la somma o la differenza tra gli esponenti. In questo caso:

$$-9+\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{(3+1-4)}\right]=-9+\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{0}\right]=-9+[1]=8 \tag{8}$$

OSSERVAZIONE 2 *Supponiamo di trovarci una situazione leggermente diversa*

$$-3^2+\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right):\left(-\frac{9}{4}\right)^{2}\right] \tag{9}$$

L'espressione diventa, con calcoli simili a quelli del caso precedente,

$$-9+\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right):\left(-\frac{3}{2}\right)^{4}\right] \tag{10}$$

Notiamo che la base delle potenze tra le quadre non è più la stessa. Possiamo però applicare le proprietà delle operazioni e delle potenze per ricondurci al caso precedente. Per nostra fortuna il segno $-$ si può portare dentro o fuori dalle potenze dispari, vale a dire

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}=-\left(\frac{3}{2}\right)^{3} \tag{11}$$

La verifica di questa proprietà è molto semplice, ma per è meglio metterla per iscritto.

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}=\left((-1)\cdot\frac{3}{2}\right)^{3}=(-1)^3\cdot\left(\cdot\frac{3}{2}\right)^{3}=(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot\left(\cdot\frac{3}{2}\right)^{3}=$$

$$=(-1)\cdot\left(\cdot\frac{3}{2}\right)^{3}=-\left(\frac{3}{2}\right)^{3}$$

A questo punto, applicando sia la (11) sia la (5), possiamo riscrivere la (10) nel seguente modo

$$-9+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right):\left(\frac{3}{2}\right)^{4}\right]=-9+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{(3+1-4)}\right]=-9+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{0}\right]=-9+[-1]=-10 \tag{12}$$