1 Esercizio Svolto

Due circonferenze, γ e $\gamma\prime$, sono concentriche. Sappiamo che γ ha equazione data da

$$\gamma : x^2 + y^2 - 6x + 8y - 23 = 0$$

mentre $\gamma\prime$ passa per il punto P di coordinate $(\frac{7}{4}; -2)$. Determinare l'equazione di $\gamma\prime$

2 Soluzione

Riscriviamo l'equazione della circonferenza γ nella forma che utilizziamo di solito $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Fatto questo potremo calcolare il centro C di γ

2.1 Calcolo del centro C di γ

Prendiamo l'equazione di partenza $4^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 23 = 0$ e dividiamo ambo i membri per 4 * in questo modo:

$$\frac{4^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 23}{4} = \frac{0}{4}$$

ottenendo l'equazione di γ in forma normale

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2y - \frac{23}{4} = 0$$

A partire da quest'ultima equazione possiamo calcolare le coordinate del centro C, ricordando che esse sono date dalla relazione $C = (-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2})$. Riconosciamo subito che

$$a = -\frac{3}{2} \Longrightarrow -\frac{a}{2} = -\frac{-\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$b = 2 \Longrightarrow -\frac{b}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Quindi il centro C avrà coordinate $(\frac{3}{4}; -1)$. Ricordiamo che C è anche il centro di $\gamma\prime$ perché le due circonferenze sono concentriche.

2.2 Calcolo del raggio r di $\gamma\prime$

Il fatto che le due circonferenze siano concentriche ci assicura che C sia il centro anche di $\gamma\prime$. Sapendo che $\gamma\prime$ passa per il punto P di coordinate $(\frac{7}{4}; -2)$ possiamo calcolare il raggio r di $\gamma\prime$ dato dalla distanza di C da P, che indicheremo con $\overline{CP}$

$$r = \overline{CP} = \sqrt{(x_c - x_p)^2 + (y_c - y_p)^2 *} = \sqrt{(\frac{3}{4} - \frac{7}{4})^2 + (-1 + 2)^2} =$$

$$= \sqrt{(-\frac{4}{4})^2 + (1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

2.3 Scrittura dell'equazione di $\gamma\prime$

Come è noto, l'equazione generica della circonfenza di centro C è data da

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Dunque noto il centro, che in questo caso ha coordinate $(x_0; y_0) = (\frac{3}{4}; -1)$, l'equazione cercata è data da

$$\gamma\prime : (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$$

Da cui sostituendo i valori e svolgendo i calcoli

$$(x - \frac{3}{4})^2 + (y + 1)^2 = 2$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} + y^2 + 2y + 1 - 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2y + \frac{9}{16} - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2y - \frac{7}{16} = 0$$